

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3}n}{n^2} = a_n$$

platí $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ (srovnávací kritérium)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy konverguje absolutně (a tedy konverguje).

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3}n}{n}$$

(a) položíme $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \sin \frac{\pi}{3}n$. Potom $a_n \geq 0$ a $\{b_n\}$ má omezenou posloupnost částečných součtů *

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (AD kritérium - Dirichletova podmínka)

* zde můžeme použít známé tvrzení, nebo si uvědomit, že posloupnost $\{b_n\}$

má tvar $a_1 = a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_4 = a_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = a_6 = 0$ $a_{k+6} = a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Odtud snadno zjistíme, že posloupnost částečných součtů má tvar

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, s_2 = \sqrt{3} = s_3, s_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}, s_5 = 0, s_6 = 0, s_{k+6} = s_k, k \in \mathbb{N}$$

Posloupnost $\{s_n\}$ je tedy periodická a tedy i omezená.

(b) uvažujme $t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$, pomocí předchozího kroku snadno uvěříme, že platí

$$t_{6n} \geq \sum_{k=1}^n |a_{6k-1}| = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{6n-1} \geq \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Dále víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$ a tedy i $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy absolutně nekonverguje

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Stačí uvažovat $|z| \leq 1$, jinak není splněna žádná podmínka.

(a) absolutní konvergence

$|z| = 1 \rightarrow$ dostáváme řadu $\sum \frac{1}{n}$ - řada diverguje

$|z| < 1 \rightarrow \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n}} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow |z| < 1$ - řada konverguje absolutně (odmocninové kritérium)

(b) pro $|z| < 1$ řada konverguje absolutně tedy konverguje

pro $z = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, řada tedy diverguje

pro $z = -1$ dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{n} > 0$, řada tedy konverguje (Leibnizovo kritérium)

Celkem:

$|z| > 1$ - řada diverguje

$z = 1$ - řada diverguje

$z = -1$ - řada konverguje ale nekonverguje absolutně

$|z| < 1$ - řada konverguje absolutně

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n^7 z^n, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Pro $|z| \geq 1$ není splněna žádná podmínka, řada diverguje (odmocninové kritérium)

Pro $|z| < 1$ platí $\sqrt[n]{n^7 |z|^n} = |z| \cdot \sqrt[n]{n^7} \rightarrow |z| < 1$, tedy řada konverguje absolutně

speciálně pro $|z| < 1$ řada konverguje

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2} z^n.$$

Pro $|z| > \frac{1}{6}$ není splněna nutná podmínka, řada diverguje

Pro $|z| \leq \frac{1}{6}$ $\frac{6^n}{n^2} |z|^n \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, řada konverguje absolutně (srovnávací kritérium)

Speciálně, řada konverguje pro $|z| \leq \frac{1}{6}$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot (\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3+1})}_{=a_n}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^3+1 - (n^3+1)}{\sqrt{n^3+3} + \sqrt{n^3+1}} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\sqrt{n^3+3} + \sqrt{n^3+1}} \stackrel{b_n}{\leftarrow}. \text{ Dále } |a_n| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy řada konverguje absolutně a tedy i konverguje.

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos(\pi n) \cdot \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}}_{a_n}$$

$$a_n = (-1)^n \sqrt{\frac{n+7}{n(n+1)}} \stackrel{b_n}{\leftarrow}, |a_n| = \sqrt{\frac{n+7}{n(n+1)}} \stackrel{\approx \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{\sim}, \sum |a_n| = \infty \text{ (srovnávací kritérium)}$$

$\sum a_n$ tedy nekonverguje absolutně

$$\text{Označme } f(x) = \frac{x+7}{x^2+x}, \text{ potom } f'(x) = \frac{x^2+x - (2x+1)(x+7)}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2-14x-7}{(x^2+x)^2} < 0 \text{ pro } x > 0$$

$$\text{Tedy } \sqrt{\frac{n+7}{n(n+1)}} = \sqrt{b_n} > \sqrt{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{(n+1)+7}{(n+1)(n+2)}} \text{ a } \sqrt{\frac{n+7}{n(n+1)}} \searrow 0$$

Celkem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. (Leibnizovo kritérium)

alternativně $\sqrt{b_n} \geq \sqrt{b_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+7}{n^2+n} \geq \frac{n+8}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow (n+7)(n^2+3n+2) \geq (n^2+n)(n+8)$

$$\Leftrightarrow n^3+3n^2+2n+7n^2+21n+14 \geq n^3+8n^2+n^2+8n$$

$$\Leftrightarrow n^2+15n+14 \geq 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$$

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}}}_{a_n}$$

$|a_n| \approx \frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}}$ tedy $\sum |a_n| = \infty$ a řada nekonverguje absolutně (srovnávací kritérium)

Dále $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}}$. Dále $\frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}} \searrow 0$ a $\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \nearrow 1$.

Odtud $\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}}$ konverguje (Leibnizovo kritérium)

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{2^{1/3} \sqrt[n]{n}}}_{\sum \text{ konverguje}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}_{\substack{\text{monotónní} \\ \text{a omezená}}} \text{ konverguje (AD kritérium - Abelova podmínka)}$

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n) \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}$$

Položíme $S(x) = \frac{n+2}{n(n+1)}$. Potom $S'(x) = \frac{x^2+x-(x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2-4x-3}{(x^2+x)^2} < 0$ pro $x > 0$.

Potom $\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}}_{\searrow 0} \cdot \underbrace{\cos(n)}_{\sum \text{ omezení částicové součty}} \text{ konverguje (AD kritérium - Dirichletova podmínka)}$

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\text{monotónní} \\ \text{a omezená}}} \cdot \underbrace{\cos(n) \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}}_{\sum \text{ konverguje}} \text{ konverguje (AD kritérium - Abelova podmínka)}$

$$(10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\log(\log n)} \Rightarrow a_n$$

$$\sin(n + \frac{1}{n}) = \sin n \cdot \cos \frac{1}{n} + \cos n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

$$\text{Tedy } a_n = \sin n \cdot \frac{1}{\log(\log n)} \cdot \cos \frac{1}{n} + \cos n \cdot \frac{1}{\log(\log n)} \cdot \sin \frac{1}{n}$$

$$\text{Platí } \cdot \frac{1}{\log(\log n)} \searrow 0 \quad (\log \text{ rostoucí})$$

$$\cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log(\log n)} \searrow 0 \quad (\log \text{ rostoucí, } \sin \frac{1}{x} \text{ klesající na } [1, \infty))$$

$$\cdot \sum \sin n, \sum \cos n \text{ mají omezené částečné součty}$$

$$\text{Tedy } \cdot \underbrace{\sum \sin n}_{\text{omezené čast. součty}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(\log n)}}_{\searrow 0} + \underbrace{\sum \cos n}_{\text{omezené čast. součty}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(\log n)} \cdot \sin \frac{1}{n}}_{\searrow 0} \text{ konverguje (AO kritérium Dirichletova podm.)}$$

$$\cdot \underbrace{\sum \sin n \cdot \frac{1}{\log(\log n)}}_{\text{konverguje}} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{n}}_{\text{monotónní a omezená}} \text{ konverguje (AO kritérium - Abelova podmínka)}$$

$$\text{Celkem } \boxed{\sum a_n \text{ konverguje.}}$$